Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Haziran 2016 Cilt:5 Özel Sayı Makale No: 42 ISSN: 2146-9199

KONİ KESİTLERİNİN ÖĞRETİMİ ÜZERİNE

Yrd. Doç. Dr. Şerife Yılmaz
Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
serifeyilmaz@mehmetakif.edu.tr

Özet

Koni yüzeyi ile bir düzlemin kesişmesi sonucu ortaya çıkan konikler (hiperbol, parabol ve elips) üzerine bir çok özellik, eski çağlardan buyana ilgi çeken geometri konularından biridir. Analitik geometri derslerinde, A , B , C gerçel sayılarından en az bir tanesi sıfırdan farklı olmak üzere

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

genel denklemi cebirsel işlemlerle düzenlenir ve ilgili koni kesitinin türü belirlenebilir. Denklemdeki terimlerin katsayıları değiştirilirken oluşan eğrilerin grafiklerini gözlemleyebilmek, koniklerle ilgili özelliklerin kavranılmasında yararlı olacaktır. Dinamik bir matematiksel yazılım olan GeoGebra gibi açık kaynaklar kullanılarak, bilgisayar ortamında bu tür uygulamalar kolaylıkla hazırlanabilir. Bu çalışmada, koniklerin tanımı, denklemlerinin elde edilişi, odak noktalarının bulunması gibi problemler, bilgisayar uygulamaları hazırlanarak görselleştirilmiş ve öğrencilerin bu konuları kavrayış süreçleri incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler: Matematik eğitimi, koni kesitleri, konik denklemleri.

ON THE TEACHING OF CONIC SECTION

Abstract

By intersecting of a plane with cone surface, a many features on the resulting conical (hyperbola, parabola, ellipse) is one of the topics of interest of geometry since ancient times. In analytical geometry lessons, the equation for a conical is following:

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$

where at least one of A , B, C is nonzero. This equation can be arranged, and the type of conic section is determined. When the coefficients of the equation are changed, corresponding curves are observed, and it will be helpful to understanding the features relating to a conic section. These applications are prepared in a computer using open sources as a dynamic mathematical software GeoGebra. In this paper, problems like the definition of conical, derivation of the equation, finding the focus of ellipse etc. was visualized by preparing to computer applications and the process of understanding these issues of students is investigated.

Keywords: Mathematics education, conic sections, conical equations.

GiRİŞ

Bu çalışmanın amacı Geogebra destekli öğretimin Analitik Geometri 1 dersine ait Konikler konusunda akademik başarı üzerine etkisini incelemektedir. Çalışma 2015-2016 eğitim öğretim yılında Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği programı 3. sınıfına kayıtlı 39 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Nicel yöntemlerin kullanıldığı bu çalışmada ölçme aracı olarak araştırmacı tarafından geliştirilen Analitik Geometri Başarı Testi uygulanmıştır. Araştırmanın amacına uygun olarak Konikler konusu öğretmen adaylarına önce geleneksel yöntemlerle anlatılır sonra konu ile ilgili kavramların geometrik temsilleri ve bu kavramların birbirleri ile ilişkileri üzerine hazırlanmış etkinlikler aracılığıyla Geogebra yazılımı kullanılarak interaktif uygulamalar yaptırılmıştır. Bu uygulamalardan sonra öğretmen adaylarına Analitik Geometri Başarı Testi tekrar uygulanmıştır.

Geometride "üç klasik problem" olarak bilinen ve eski çağlarda pek çok matematikçinin çözüm bulmak için uğraştıkları problemler

1. Herhangi bir açının üç eşit parçaya bölünmesi,
2. Bir çemberin alanına eşit bir kare oluşturulması,
3. Bir kübün hacminin iki katı olan yeni bir küp oluşturulması veya "Delos Problemi"dir (Tekeli, 1966).

Günümüzde, analitik geometri ile bu problemlerin çözümleri kolaylıkla verilebilir. Ancak bu problemlerin ortaya çıktığı dönemde, sadece cetvel ve pergel yardımıyla çözümlerin araştırılması söz konusudur. Bugün, cetvel ve pergel kullanılarak bu problemlerinin çözümünün yapılamayacağını bilmekteyiz (Batson, 2005).

Koniklerin Kısa Tarihçesi ve Konik Denklemleri

Menaechmus, M.Ö. 350 yıllarında dikdörtgensel hiperbol ve parabolleri kullanarak Delos problemini çözmüştür. Bu problemin çözümü ile birlikte ilk kez konik kavramı ortaya çıkmıştır (Boyer, 1968).

Arşimet ve Öklid'in de eserlerinde koni kesitlerine ilişkin bilgiler yer almaktadır. Öklid, Elementler isimli kitabının 12. cildinde koniklere değinmiştir. Arşimet'in "Conoids and Spheroids" adlı eserinde konik kelimesi geçmektedir, ancak burada bu kelimeyle bir parabolün veya hiperbolün kendi ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cisimler kastedilmiştir (Cajori, 2014). Antalya-Perge'li Apollonius (M.Ö. 262-190), sekiz ciltden oluşan "Konik Kesitler" (Konica) isimli bir kitap yazmıştır. Bu kitapta koniklere ilişkin en temel teoremlere ve koniklerin karakterizasyonuna yer verilmiştir. Bunun sonucu olarak kitap, Apollonius'a "Büyük Geometrici" ünvanını kazandırmıştır (Batson, 2005). Apollonius'un kitabında koni kesitleri ilk defa aynı koniden elde edilmiş ve bu sayede üç koni kesiti (elips, parabol ve hiperbol) arasındaki ilişki meydana çıkmıştır.

Dairesel bir dik koni ile bu koninin ekseniyle belirli bir açı yapan düzlemlerin kesişiminden bu üç temel koni kesiti (elips, parabol ve hiperbol) elde edilebilir.

17. yüzyılda Descartes'ın geliştirdiği koordinat sistemiyle (Analitik Geometri) problem cebirsel yöntemlerle ele alınmış ve koniklerle ilgili teoremlerin cebirsel kanıtları verilebilmiştir (Batson, 2005).

Günümüzde analitik geometri derslerinde koni kesitlerinin geometrik tanımları ayrı ayrı verildikten sonra, koniklerin denklemleri genel olarak ifade edilmektedir.

ve gerçel sayılarından en az bir tanesi sıfırdan farklı olmak üzere koniklerin genel denklemi (dik koordinat sisteminde)

(1)

şeklinde ifade edilir.

Bu denklemin belirlediği noktalar kümesi boş küme ya da tek bir nokta olabileceği gibi elips, parabol veya hiperbol koniklerinden birini oluşturur (Kaya, 1985). Denklemin belirlediği koni kesitini bulmak için katsayılardan elde edilen sonuçlar kullanılır. Bunun yanı sıra, verilen denklem cebirsel işlemlerle düzenlenerek de ilgili konik bulunabilir. (1) denkleminin katsayıları yardımıyla

$\delta = 4AC - B^2$

sayısı hesaplanır.

Eğer

- $\delta < 0$ ise (1) denklemi bir elips,
- $\delta = 0$ ise (1) denklemi bir parabol,
- $\delta > 0$ ise (1) denklemi hiperbol belirlemektedir.

Diğer taraftan (1) denklemi verildiğinde bu denklemi kareye tamamlamaya çalışarak da denklemin ifade ettiği konik bulunabilir. Bu yolla sınıflandırma yapılırken, koniklerin geometrik tanımları ile genel denklemleri arasındaki ilişki doğrudan görülemeyeceği için verilen denklemin hangi yönde (elips, parabol, hiperbol) düzenlenmesi gerektiği, kişinin soyut düşünme beceri düzeyine bağlıdır.

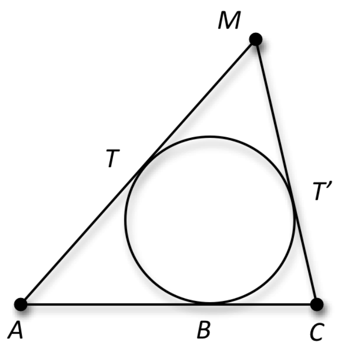
Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Haziran 2016 Cilt:5 Özel Sayı Makale No: 42 ISSN: 2146-9199

Konikler üzerine yapılan çalışmalar, farklı çağlarda birbiriyle çok karmaşık ilişkileri olan farklı yöntemlerle ele alınmıştır. Sınıf ortamında konik kavramını oluşturmak için, koniklerin tarihsel gelişimindeki temel unsurları yeniden oluşturmak gerekir (Bussi, 2005).

Aynı özellikleri taşıyan noktaların oluşturduğu küme, geometrik yer (locus) olarak tanımlanabilir (Sarıgül, 2001). Koniklerin ortaya çıkışındaki tarihsel gelişim göz önünde bulundurulduğunda, koniklerin geometrik tanımlarının, dolayısıyle geometrik yerlerinin ve temel özelliklerinin öncelikli olarak verilmesi doğaldır. Ancak, geleneksel ortamlarda geometrik yerin görselleştirilmesi son derece zordur ve çözüm sürecinde sezgiler ön plana çıkmaktadır.

İlker ve Terzioğlu' nun "Konikler" adlı kitabında 200 civarında problem ve bunların çözümleri bulunmaktadır. Bu problemlerden bir tanesi (İlker ve Terzioğlu, 1960) örnek olarak aşağıda verilmiştir.

Soru: Bir doğru üzerinde ve A, B, C sırasında üç nokta veriliyor. Değişken bir daire B noktasında ABC doğrusuna teğet olduğuna göre A ve C noktalarından bu daireye çizilen teğetlerin M kesişme noktasının geometrik yeri nedir?



Çözüm: olduğunu varsayalım. ve noktalarından daireye çizilen teğetlerin değme noktalarını $\mathbf{T}, \mathbf{T}'$ ile gösterelim.

$$\mathbf{MA} = \mathbf{MT} + \mathbf{TA} = \mathbf{MT} + \mathbf{AB},$$

yazılabilir, buradan da

$$\mathbf{MA} - \mathbf{MC} = \mathbf{AB} - \mathbf{BC} = \mathbf{sabit}$$

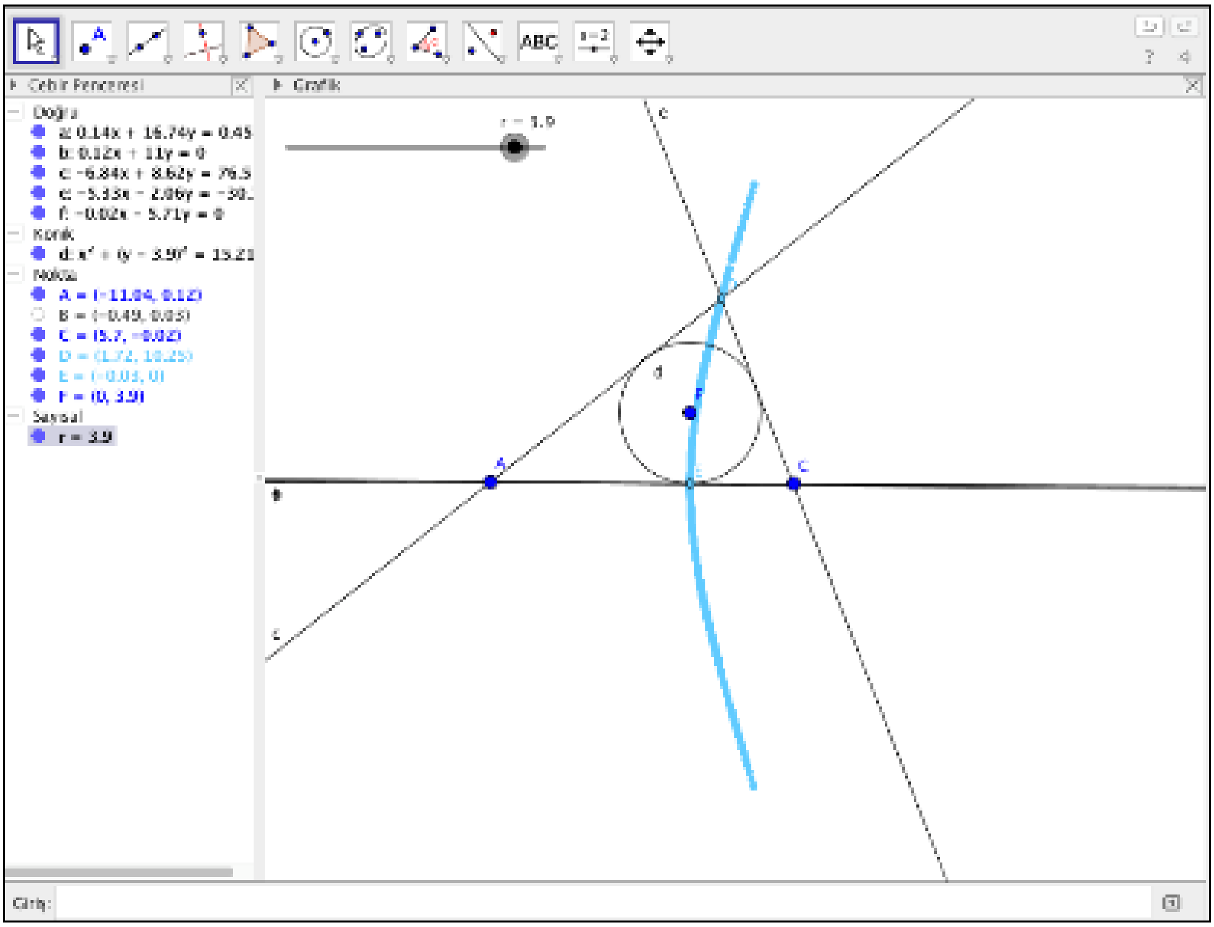
olarak bulunur. Şu halde noktasının geometrik yeri odakları A, C noktaları olan bir hiperboldür.

Bu sorudan ve çözümünden de anlaşılacağı üzere, koniklerle ilgili problemlerin çözümünde kişinin soyut düşünme beceri düzeyi çok önemlidir.

Geometrik olarak tanımı verilen bir elips, parabol veya hiperbolün grafiğini çizebilmek için çizim araçları geliştirilebilir. Her bir soru için bu şekilde çizim araçları tasarlamak ise oldukça zordur (Güven ve Karataş, 2009).

Genel olarak geometrik yer problemlerinde karşılaşılan bu sorunu aşmak için günümüzde Dinamik Geometri Yazılımları (DGY) kullanılmaktadır. Bu yazılımlardan GeoGebra, ilköğretimin ikinci kademesinden üniversite düzeyine kadar öğretme ve öğrenme sürecinde çok yaygın olarak kullanılabilen ücretsiz bir yazılımdır. Bu yazılımda uygulama oluşturulmasındaki sadelik ve yazılımın çeşitli dillere çevrilmiş olması nedeniyle GeoGebra matematik öğretiminde önemli bir araçtır. Öğretmenler için GeoGebra, internet üzerinden materyaller paylaşmayı teşvik eden çevrimiçi öğrenme ortamları yaratmak için güçlü fırsatlar sunmaktadır (Aktümen ve diğ., 2011). Öklid geometresine dayanan Geogebra (Hohenwarter, 2004), öğrencilerin matematiksel objeleri görselleştirmelerine, matematiksel kavramların görsel anlayışını geliştirmelerine ve bu kavramlar arasındaki ilişkileri anlamalarına yardımcı olur (Karadağ ve McDougall, 2009).

Bu görüşlerden yola çıkarak Analitik Geometri Dersine ait Konikler konusunun öğretiminde Geogebra yazılımı kullanımının öğretmen adaylarının bu konuya ilişkin akademik başarıları üzerine olumlu etki yapacağı düşünülmüş ve konunun anlatımında kullanılmak üzere koniklerin geometrik yeri ile genel denklemleri arasındaki karmaşık ilişkinin ortaya çıkarılmasına yönelik olarak GeoGebra etkinlikleri tasarlanmıştır.



Şekil 1: GeoGebra Etkinliklerinden Bir Örnek.

YÖNTEM

Evren ve Örneklem

Çalışma 2015-2016 öğretim yılının güz döneminde, ilköğretim matematik öğretmenliği üçüncü sınıfında öğrenim gören 39 öğretmen adayına uygulanmıştır.

Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi
Journal of Research in Education and Teaching
Haziran 2016 Cilt:5 Özel Sayı Makale No: 42 ISSN: 2146-9199

Araştırmanın Türü

Haftada üç ders saati olmak üzere toplam 7 haftalık bir sürede gerçekleştirilen bu çalışmada ilk olarak, klasik yöntemlerle konikler anlatıldı. Ardından hazırlanmış olan açık uçlu soruları cevaplandırmaları istendi. Daha sonraki derslerde dinamik matematik yazılımlarından GeoGebra' nın öğretimi yapılmıştır. Ardından tekrar aynı soruları cevaplandırmaları istendi. Nicel yöntemlerin kullanıldığı bu çalışmada öğretmen adaylarının, GeoGebra yazılımı kullanılmadan önce ve sonra sorulara vermiş oldukları cevapların içerik analizi yapılmıştır. Elde edilen veriler içerik analizine tabi tutularak bir kod listesi oluşturulmuştur. Bunun için öncelikle veriler okunmuştur, kodlamalar çıkarılmıştır. Ardından her öğretmen adayının sorulara verdikleri cevaplar okunarak her bir soru için kodlar düzenlenmiştir.

Veri Toplama Araçları

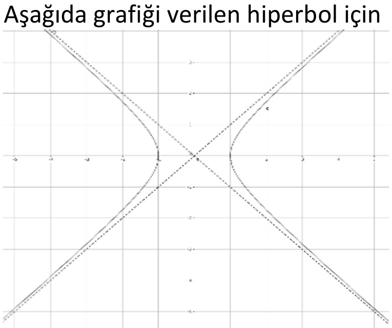
Bu çalışmada ölçme aracı olarak araştırmacı tarafından geliştirilen 11 soruluk Analitik Geometri Başarı Testi uygulanmıştır.

Verilerin Analizi

Elde edilen veriler, "öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımı kullanılmadan önce sorulara vermiş olduğu cevaplar", "öğretmen adaylarının GeoGebra yazılımını öğrendikten ve uyguladıktan sonra sorulara vermiş olduğu cevaplar" ve "öğretmen adaylarının cinsiyetine göre sorulara vermiş olduğu cevaplar" şeklinde üç alt başlık altında incelenmiştir.

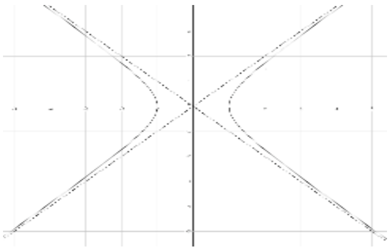
BULGULAR

Geliştirilen 11 soruluk Analitik Geometri Başarı Testi soruları aşağıda verilmiştir.
Aşağıda grafiği verilen hiperbol için



1) Öyle bir *A* noktası işaretleyiniz ki, o noktadan hiperbole iki tane teğet çizilebilsin.
2) Öyle bir *B* noktası işaretleyiniz ki, o noktadan hiperbole sadece bir tane teğet çizilebilsin.
3) Öyle bir C noktası işaretleyiniz ki, o noktadan hiperbole hiç bir teğet çizilemesin.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ denklemi ile verilen bir hiperbolün grafiği aşağıdaki gibi olsun.



4) a sayısı büyütüldüğünde hiperbolün grafiği nasıl değişir?
5) b sayısı küçültüldüğünde hiperbolün grafiği nasıl değişir?
6) Düzlemde $x^2 - 2xy + 2y^2 - 3y - 5 = 0$ denklemini sağlayan (x, y) noktaları var mıdır? Varsa bu noktaların düzlemdeki resmi için ne söyleyebiliriz? Bu denklemle verilen eğri Elips, Parabol ve Hiperbol koniklerinden hangisidir?
7) $x^2 + 2y^2 - 5 = 0$ elipsinin odaklarını bulunuz.
8) $x^2 - 2xy + 2y^2 - 5 = 0$ elipsinin odaklarını bulunuz.

$y = ax^2 + bx + c$ denklemi ile verilen parabol için

9) a ve b sabit iken c parametresi değiştirildiğinde parabolün grafiği nasıl değişir?
10) b ve c sabit iken a parametresi değiştirildiğinde parabolün grafiği nasıl değişir?
11) a ve c sabit iken b parametresi değiştirildiğinde parabolün grafiği nasıl değişir?

Geogebra destekli uygulamalar sonunda bu uygulamaların akademik başarı üzerine herhangi bir etkisinin olup olmadığını test etmek amacıyla araştırma öncesinde öğretmen adaylarına uygulanan açık uçlu soru tekrar uygulanmıştır. Konikler ile ilgili bu sorulara ilişkin test puanları arasında anlamlı bir farkın olup olmadığı, öğretmen adaylarının konuya ilişkin erişi puanları Paired Samples t testi ile incelenmiştir. Erişi puanlarına ait Paired Samples t testi sonuçlarına göre öğretmen adaylarının uygulamadan önceki akademik başarıları ile uygulamadan sonraki akademik başarıları arasında anlamlı bir fark olduğu görülmüştür.

Tablo 1: Geogebra uygulaması yapılmadan önce ve sonra "t" testi sonuçları

	N	Ortalama	Standart Sapma	Serbestlik derecesi (df)	t	Sig.(2-tailed) Olasılık
Uygulamadan önce	39	6,1	0,29	38	8,011	0,001
Uygulamadan sonra	39	8,94	0,36			

olması Geogebra destekli öğretimin öğretmen adaylarının konikler konusuna ilişkin akademik başarılarına olumlu yönde etki yaptığı şeklinde yorumlanabilir.

Tablo 2: Geogebra uygulaması yapılmadan önce ve sonra cinsiyete göre "t" testi sonuçları

	N	Ortalama	Standart Sapma	Serbestlik derecesi (df)	t	Sig.(2-tailed) Olasılık
Erkek Öğrenciler	14	2,78	0,61	37	-0,126	0,901
Kız Öğrenciler	25	2,88	0,44			

olması Geogebra destekli öğretimin öğretmen adaylarının konikler konusuna ilişkin akademik başarılarının cinsiyete göre anlamlı farklılığın olmadığı şeklinde yorumlanabilir.

TARTIŞMA VE SONUÇ

Matematik öğretmeni adaylarına klasik yöntemle Analitik Geometri dersinin anlatılması ile bilgisayar destekli matematik öğretiminin yapılması arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığının ve verilen cevapların kız öğrencilere ve erkek öğrencilere göre farklılık gösterip göstermediğinin araştırıldığı bu çalışmada elde edilen sonuçlara göre; matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra yazılımı kullanılmadan öncesi ve sonrası arasında anlamlı farklılığın olduğu yani ortalamalarındaki yükselişin anlamlı olduğu görülmüştür. Bunun geometri de görselleştirmenin matematiğe göre daha fazla olması ve öğretmen adaylarının dinamik yazılımlarda görselleştirmeyle konuyu daha iyi kavramasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

Araştırmanın diğer adımı olan matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra yazılımını kullanmadan önce verdiği cevaplar ile GeoGebra yazılımı kullandıktan sonra verdiği cevapların ortalamaları arasında cinsiyete göre anlamlı farklılığın olmadığı yani ortalamalarındaki bu artışta cinsiyet yönüyle anlamlı bir farklılık olduğu görülmemiştir.

KAYNAKÇA

Aktümen, M., Yıldız, A., Horzum, T. ve Ceylan, T. (2011). İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin GeoGebra Yazılımının Derslerde Uygulanabilirliği Hakkındaki Görüşleri. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 2 (2), 103-120.

Batson, H. (2005). Koniklerin Tarihçesi ve Antalyalı Apollonius. *Matematik Dünyası*, 17-20.

Boyer, C.B (1968). *A History of Mathematics.* Princeton, NJ: John Wiley & Sons.

Bussi M.G.B. (2005). Meaning in Mathematics Education, *The series Mathematics Education Library*, 37, 39-60.

Cajori, F. (2014). *Matematik Tarihi.* Ankara: ODTÜ Yayıncılık.

Güven, B. & Karataş, İ. (2009). The Effect of Dynamic Geometry Software (Cabri) on Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Achivement About Locus Problems. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences*, 42 (1), 1-31.

Hohenwarter, M. (2004, July). *Bidirectional Dynamic Geometry and Algebra with GeoGebra*. 04.05.2011 tarihinde http://class.pedf.cuni.cz/katedra/yerme/clankyucast/ Hohenwarter.pdf adresinden alınmıştır.

İlker, N. ve Terzioğlu, N. (1960). *Konikler*. Şirketi Mürettibiye Basımevi.

Karadag, Z. & McDougall, D. (2009). Dynamic Worksheets: Visual Learning With The Guidance Of Polya. *MSOR Connections*, 9 (2), 13-16.

Kaya, R. (1985). *Analitik Geometri.* Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları.

Sarıgül, Ö.E. (2001). *Lise 2 Geometri Ders Kitabı*, Ankara:MEB Yayınevi.

Tekeli, S. (1966). İslam Dünyasında Delos Problemi Üzerindeki Çalışmalar. *Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü Dergisi*, Araştırma IV, 90-91.